Pertemuan ke-7

Implementasi Model Numerik

Oleh :
Benny Osta Nababan, S.Pi, M.Si

bennyosta.blogspot.com

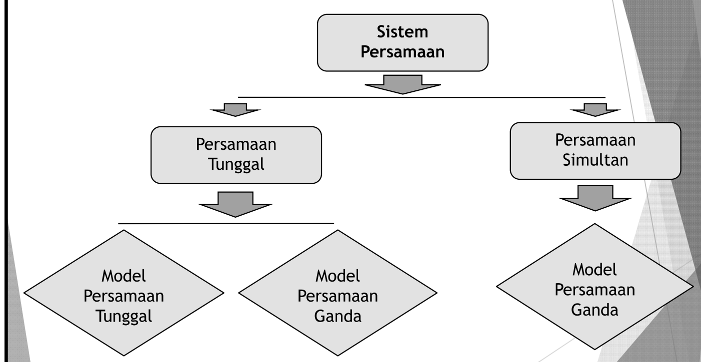
Pendahuluan

- Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka.
- Metode Numerik: Teknik menyelesaikan masalah matematika dengan pengoperasian perhitungan / aritmatika dengan menggunakan angka-angka.
- Pada umumnya mencakup sejumlah besar kalkulasi aritmatika (+, -, x, :)yang sangat banyak dan menjenuhkan
- Perlu model untuk menyederhanakan masalah dan dianalisa dengan bantuan komputer untuk melaksanakannya

Kenapa diperlukan ?

- Pada umumnya permasalahan dalam sains dan teknologi digambarkan dalam persamaan matematika
- Solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka.
- Persamaan matematika ini sulit diselesaikan dengan cara biasa sehingga diperlukan penyelesaian pendekatan → numerik

Model Umum Metode Numerik : Sistem Persamaan



- **Model persamaan tunggal** adalah model persamaan yang terdiri dari satu persamaan yang menggambarkan hubungan variabel bebas dengan variabel tak bebas.

  Contoh : $Y_t = B_0 + B_1 X_{1t} + \varepsilon_t$ ....*(1)*

- **Model persamaan berganda** adalah model persamaan yang terdiri dari dua atau lebih persamaan yang menggambarkan hubungan variabel bebas dengan variabel tak bebas.

Contoh : $Y_t = B_0 + B_1 X_{1t} + B_2 X_{2t} + \ldots + B_n X_{nt} + \varepsilon_t$ .... *(1)*

$Q_t = \lambda_0 + \lambda_1 Z_{1t} + \lambda_2 Z_{2t} + \ldots + \lambda_n Z_{nt} + \varepsilon_t$ .... *(2)*

$R_t = a_0 + a_1 A_{1t} + a_2 A_{2t} + \ldots + a_n A_{nt} + \varepsilon_t$ .... *(3)*

5

Sistem persamaan simultan

Suatu persamaan dimana variabel bebas dalam lebih dari satu persamaan harus diolah secara bersama-sama (simultan) agar dapat diperoleh nilai tertentu yang sama pada variabel bebas masing-masing tersebut

Contoh : Suatu persamaan linier simultan :

$5x_1 + 2x_2 - 1x_3 = 12$ .... (1)
$3x1 + 4x2 + 7x3 = 18$ .... (2)
$-6x1 + 8x2 + 9x3 = 15$ .... (3)

Dari kasus tersebut hitunglah x1, x2, x3 ?

Sumber Kesalahan

- Kesalahan pemodelan, contoh: penggunaan model optimasi → analisis simulasi
- Kesalahan bawaan, contoh: kekeliruan dalam menyalin data
- Salah membaca skala
- Salah membaca satuan
- Ketidaktepatan data
- Kesalahan pembulatan (*round-off error*)

Angka signifikan

- 7,6728 → 7,67 3 angka signifikan
- 15,506 → 15,51 4 angka signifikan
- 7,3600 → 7,4 2 angka signifikan
- 4,27002 → 4,3 2 angka signifikan

Model Numerik untuk SDAL

- Isu dan kompleksitas permasalahan dlm pengelolaan SDA sangat beragam => perlu dipecahkan
- Contoh permasalahan pengelolaan SDA yang perlu dipecahkan :
  - *Berapa produksi yang optimal suatu usahatani dengan keterbatasan lahan dan modal ?*
  - *Berapa biaya transportasi terkecil untuk mengirim ikan dari pasar A dan B ke daerah 1, 2 dan 3 ?*
  - *Berapa produk yang optimal agar petani dapat memperoleh untung yang maksimal ?*
  - *Berapa penangkapan ikan yang optimal pada suatu area agar tidak overfishing ?*
  - *Berapa kubik kayu yang harus ditebang pada suatu area hutan agar tetap menjaga kelestarian lingkungan ?*

Metode Numerik dengan Teknik Matriks

- Teknik pemecahan masalah dalam pengelolaan sumberdaya alam sangat bervariatif. Salah satu metode sederhana yang dapat digunakan yaitu teknik aljabar matriks.
- Teknik Matriks merupakan teknik sederhana untuk memecahkan masalah-masalah kuantifikasi.

Bagaimana menghitung nilai determinan ?

Determinan dengan matriks 2x2

Determinan : produk (hasil kali) bertanda dari unsur-unsur matriks sedemikian hingga berasal dari <u>baris dan kolom yang berbeda</u>, kemudian hasilnya dijumlahkan.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Det}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinan dari matriks A ditulis **det(A)** atau **|A|.**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Det}(A) = \_\_\_\_?$$

Determinan dengan matriks 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \longrightarrow |A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow |B| = \_?$$

Penyelesaian persoalan numerik

- Identifikasi masalah
- Memodelkan masalah ini secara matematis
- Identifikasi metode numerik yang diperlukan untuk menyelesaikannya
- Lakukan perhitungan atau Implementasi metode ini dalam komputer
- Analisis hasil akhir / kesimpulan / interpretasi

Kasus :

Seorang petani menjual dua produk buah-buahan yaitu tomat dan Cabe. Jika harga tomat dan cabe per buah masing-masing US$ 2 dan US$ 5 penerimaan sebesar US $ 20, namun jika harga tomat dan cabe masing-masing sebesar US$ 1 dan US$ 3 maka penerimaan sebesar US$ 10. Berapa yang harus diproduksi agar petani memperoleh untung yang maksimal ?

Contoh penyelesaian persoalan numerik

- Identifikasi masalah : Berapakah tomat dan cabe yang harus diproduksi agar dapat optimal ?

  Variabel :

  X1 = Tomat

  X2 = Cabe
- Memodelkan masalah secara matematis :

  2X1 + 5X2 = 20

  X1 + 3X2 = 10
- Identifikasi metode numerik yang diperlukan : matriks
- Lakukan perhitungan atau Implementasi metode ini secara manual
- Analisis hasil akhir: Petani seharusnya hanya memproduksi tomat sebanyak 10 buah

Jawab : Selesaikan dengan solusi teknis matriks

- 2X1 + 5X2 = 20

  X1 + 3X2 = 10
- Det A = $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (2x3) - (1x5) = 1$
- X1 = 1/Det A $\begin{vmatrix} 20 & 5 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}$ = 60 – 50 = 10
- X2 = 1/Det A $\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$ = 20 – 20 = 0

Kesimpulan : Petani hanya menjual tomat saja sebanyak 10 buah

Bagaimana menghitung matriks invers ?

Formula sederhana untuk menghitung invers matriks (2x2):

Matriks $A_{2\times2}$ sebagai berikut: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

bila $\Delta = ad - bc$ maka

a. jika $\Delta = 0$, maka A tidak mempunyai invers

b. jika $\Delta \neq 0$, maka A mempunyai invers sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linier, misal dalam bentuk :

a1.x1+ a2.x2 = b,

dengan MS Excel dapat digunakan cara Invers Matriks (2x2).

$[a]^{-1} . x = b$

Contoh : Suatu persamaan linier

$$x_1 + 3x_2 = -1$$
$$2x_1 + 4x_2 = 2$$

Dari kasus tersebut hitunglah x1 dan x2?

Jawab:

Matriks koefisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix};\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 5$ dan $x_2 = -2$

Anda dapat melakukan beberapa pendekatan untuk memecahkan sistem persamaan linear di Excel
Dalam menyelesaikan persamaan linier, misal dalam bentuk :

a1.x1+ a2.x2 + a3.x3 = b,

dengan MS Excel dapat digunakan cara Invers Matriks (3x3).

$[a]^{-1} . b = x$

Contoh : Suatu persamaan linier simultan :

$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12$ .... (1)
$0x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 18$ .... (2)
$1x_1 - 1x_2 + 5x_3 = 15$ .... (3)

Dari kasus tersebut hitunglah x1, x2, x3 ?

Terima Kasih